11. Там само. - 21 мая.
12. Там само. - 24 мая.
13. Там само. - 25 мая.
14. Там само. - 27 мая.
15. Там само. - 28 мая.
16. Солдатенко В. Ф. Українська революція. Історичний нарис. - К., 1999. - 626 с.
17. Українська Центральна Рада. Документи і матеріали: У 2 т. - Т.1. - 4 березня - 9 грудня 1917 р. - К., 1996. - 588 с.
18. Українське слово. - 1917. - Ч. 6. - Червень.
19. Там само. - Ч. 8. - Червень.
20. Український національно-визвольний рух (березень - листопад 1917 року). Документи і матеріали. - К., 2003. - 1022 с.
21. Христев И. Румчерод в подготовке Октябрьской революции // Летопись революции. - 1922. - № 1. - С. 171-183.
22. ЦДАВО України. - Ф. 3156. - Оп. 1. - Спр. 11.
23. Там само.
24. Там само. - Ф. 3156. - Оп. 1. - Спр. 150.
25. Шишко О. Г. До історії українського руху в Одесі: березень 1917 року // Записки історичного факультету. - Одеса, 2003. - Вип. 13. - С. 95-105.
26. Його ж. До історії українського руху в Одесі: квітень 1917 року // Записки історичного факультету. - Одеса, 2007. - Вип. 18. - С. 90-100.
27. Щусь О. Й. Всеукраїнські військові з'їзди // Історичні зошити. - 1992. - № 7. - 86 с.

Швець В. Т.

УДК 94(477.74):329.7"1933"

1933 - УКРАЇНСЬКИЙ РАХУНОК

У статті на основі математичних методів моделювання динаміки чисельності населення обґрунтовуються кількісні показники загиблих під час геноциду-голодомору українського народу 1932-1933 років.

Ключові слова: голодомор, популяція, населення України, чисельність населення, міграція.

За час, що минув після Голодомору 1932-1933 років, спочатку за кордоном, а з 90-х років XX ст. і в Україні, з'явилася велика кількість наукових досліджень про цю страшну трагедію, було опубліковано спогади очевидців Великого голоду, яким вдалося дивом вижити в ті роки, побачили світ раніше недоступні архівні матеріали тощо. Наскільки вражаючим є масив публікацій на цю тему засвідчило видання Одеською національною науковою бібліотекою імені М. Горького двох випусків науковобібліографічного покажчика "Голодомор в Україні 1932-1933 рр." [1, 10].

Здавалося б, створено всі передумови для увічнення пам'яті про загиблих як запоруку формування цивілізованої і гуманної української нації, здатної до прозріння і спокути. В той же час ми і далі спостерігаємо продовження гострої ідеологічної боротьби, де проблема Голодомору залишається заручником протистояння політичних сил. Одним з найбільш гострих питань, з приводу яких ведеться запекла полеміка, є питання про чисельність загиблих у ті трагічні часи. У зв'язку з цим метою даної публікації є використання математичних методів для обґрунтування питання щодо кількості загиблих у 1932-1933 роках.

Моделювання динаміки чисельності популяцій. Інтерполяційна одновидна модель.

За означенням, питома швидкість розмноження популяцій r(t) визначається як

$$r(t)=N^{-1}(t)\, dN(t)/dt,$$

де N(t) - абсолютна чисельність популяції у момент часу t. Тобто, питома швидкість розмноження дорівнює зміні числа особин популяції за одиницю часу у розрахунку на одну особину. Якщо функція r(t) відома, то наведене співвідношення є диференційним рівнянням відносно абсолютної чисельності популяції. Для людських спільнот кожної держави функція r(t) відома з інтервалом у часі, що становить один рік, і є різницею кількості народжених і кількості померлих у розрахунку на одну особу у відповідний момент часу. Знаючи цю чисельність у початковий момент часу t0, тобто доповнюючи диференційне рівняння початковою умовою

$$N(t_0)=N_0$$

можна знайти її чисельність у довільний момент часу. При цьому t належить інтервалу $[t0,\infty)$. Диференційне рівняння, разом з початковою умовою утворюють задачу Коші, яка завжди має єдиний розв'язок.

Після поділу змінних рівняння набуває вигляду

$$dN(t)/N(t)=r(t)dt.$$

Назвемо це рівняння рівнянням Мальтуса, оскільки у разі r(t)=const він першим проаналізував його розв'язок. Інтегруючи обидві частини останнього рівняння в межах від t0 до t, ми отримаємо інтегральне рівняння, еквівалентне вихідній задачі Коші

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dN(\tau)}{N(\tau)} = \int_{t_0}^{t} r(\tau)d\tau .$$

Інтеграл у лівій частині легко обчислюється і ми отримуємо частинний інтеграл

$$\ln\left(N(t)\right)-\ln\left(N(t_0)\right)=\int_{t_0}^{t} r(\tau)\,d\tau .$$

Очевидно, частинний розв'язок вихідної задачі Коші буде наступним

$$\boxed{N(t)=N_0\exp\left[\int_{t_0}^{t} r(\tau)\,d\tau\right]}$$

Інколи чисельність особин популяції відома у кінцевий момент часу t_1 і становить N_1, тобто $t\in(-\infty,t_1]$. Тоді відповідний частинний розв'язок вихідного рівняння матиме вигляд:

$$\boxed{N(t)=N_1\exp\left[-\int_{t}^{t_1} r(\tau)\,d\tau\right]}$$

Звичайно, вимірюють питому швидкість розмноження популяції та чисельність популяції одночасно. Якщо такі виміри носять регулярний характер і розташовані досить щільно, то практична цінність отриманих формул для кількості особин популяції як функції часу є невеликою. Практична цінність формул зростає, якщо щільність вимірювань мала. У цьому разі також можна обійтись без отриманих формул, інтерполюючи окремо дані з питомої швидкості розмноження популяції і окремо дані з абсолютної чисельності популяції. В останньому випадку отримані формули дозволяють перевірити узгодженість даних щодо швидкості розмноження популяції та її абсолютної чисельності, оскільки зазначені величини не є незалежними, а пов'язані між собою саме отриманими формулами. Якщо інтерполяцію виконати лише для даних щодо питомої швидкості розмноження популяції, а відповідні їм значення абсолютної чисельності популяції отримати за допомогою отриманих формул, то така процедура підвищить точність наближених значень абсолютної чисельності. Особливо цінними ці формули є у разі раптової загибелі частини популяції. Питома швидкість розмноження при цьому може не змінитись. Якщо час катастрофи відомий з інших джерел, то отримані формули дозволяють отримати втрати абсолютної чисельності популяції з максимально можливою повнотою.

Приклад 1. Проаналізуємо за допомогою отриманих формул дані щодо змін чисельності населення України. Для перевірки ефективності формул доцільно обрати такий період часу, коли кількість даних найменша. Таких періодів в історії України є декілька. З них найменше даних припадає на період перед Другою світовою війною. Дані щодо чисельності населення України у відкритих джерелах наведені для 1913 року і для 1939 року. Інші проміжні дані за цей період часу відсутні. Далі наведемо програму, створену за допомогою пакету Mathcad, яка і забезпечить нам відповідні числові розрахунки. З контексту буде легко зрозуміти, де формули написані за правилами пакету Mathcad, а де - звичайний математичний запис. Необхідні дані візьмемо із "Статистичного довідника: УРСР у цифрах 1977", підготовленого колективом Центрального статистичного управління при Раді Міністрів Української РСР [2].

Розглянемо проміжок часу $t \in [t_0, t_1]$. При цьому, нехай 1913 і 1930 роки відповідають кінцям інтервалу.

$$t1 := 1913 \qquad t2 := 1939$$

Питома швидкість розмноження популяції, тобто природний приріст населення України в перерахунку на одну особу в сучасних кордонах позначимо через a_1 у 1913 році і через a_2 у 1939 році. У довіднику не зазначається, чи цей показник стосується всієї України, чи тільки західної. Наше припущення, що цей показник взятий лише для східних областей України, оскільки окремо для західних областей України цей показник завжди був вищим і дотепер є вищим, ніж у східних областях України. Відповідно, отримані нами висновки були б ще більш песимістичними, якби цей фактор був врахованим. Згідно довіднику

$$r0 := 0.0189 \qquad r1 := 0.013$$

Якщо останні числа помножити на 100, то отримаємо приріст всього населення України за 1913 рік або за 1939 рік у відсотках. Чисельність населення у ті ж роки в сучасних кордонах України у ті ж роки у мільйонах осіб

$$n0 := 35.2 \qquad n1 := 40.5$$

За відсутністю детальнішої інформації для питомої швидкості розмноження популяції скористаємось лінійною інтерполяцією. Тобто вважатимемо, що для $t \in [t_0, t_1]$ питома швидкість розмноження популяції як функція часу визначається лінійною функцією

$$r(t) = k \cdot t + b\,.$$

Маючи значення цієї функції у двох крайніх точках інтервалу отримаємо значення коефіцієнтів k і b.

Given

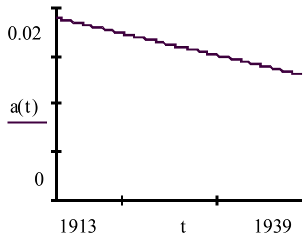
$$r0 = k \cdot t0 + b$$
$$r1 = k \cdot t1 + b$$
$$A := \mathrm{Find}(k, b) \rightarrow \begin{pmatrix} -0.000226923076923076923 08 \\ 0.45300384615384615385 \end{pmatrix}$$

Тут оператор Given позначає початок обчислювальної зони. Оператор-функція Find позначає її кінець. Аргументами цієї функції є невідомі величини системи двох лінійних алгебраїчних рівнянь. Знак рівності при запису рівнянь набирається одночасним натисканням клавіші "Ctrl" і клавіші "=" . Стрілочка після оператору Find означає, що система рівнянь розв'язується аналітично. А є двоелементною матрицею. Причому,

$$k := A_0 \qquad b := A_1$$

Графік відповідної залежності має вигляд

$$t := 1913, 1913.1 .. 1939$$

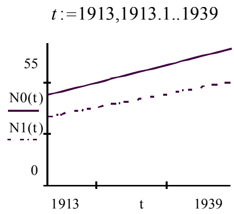


Малюнок 1. Залежність питомої швидкості зростання популяції від часу

Далі побудуємо графіки залежностей населення України від часу у двох випадках. У першому з них відправною точкою для чисельності населення буде 1913 рік, у другому випадку - 1939 рік. Введемо відповідні функції

$$N0(t) := n0 \cdot \exp\left(\int_{t0}^{t} r(\tau)\,d\tau\right) \qquad N1(t) := n1 \cdot \exp\left(-\int_{t}^{t1} r(\tau)\,d\tau\right)$$

де $N0(t)$ - залежність чисельності від часу за першим варіантом, *N1 (t)* - за другим. Нарешті, побудуємо графіки.



Малюнок 2. Залежність чисельності населення від часу: функція $N0(t)$ *використовує відоме початкове значення чисельності населення, функція N1(t) – кінцеве.*

Спостерігаємо неузгодженість графіків. Якщо ми відштовхуємось від чисельності населення України у 1913 році, то його чисельність у 1939 році мала б складати *N0(1939)=53.29* млн. осіб, але за статистичними даними вона склала 40.5 млн. осіб. Якщо ж ми відштовхуємось від 1939 року, то його чисельність у 1913 році мала б скласти *N1(1913)=26.752* млн. осіб замість 35.2 млн. осіб. Тобто замість однієї кривої зміни чисельності населення від часу ми маємо дві криві. Така ситуація свідчить про швидке знищення частини популяції за один чи декілька коротких відрізків часу. Різке знищення тому, що якби процес знищення був розтягнутим у часі і був більш менш рівномірним (депортація, ув'язнення, фізичне знищення з політичних міркувань, постійне недоїдання, високий рівень захворюваності небезпечними хворобами), то відбилось би лише на питомій швидкості розмноження популяції - вона була б меншою за рахунок відповідних факторів. Оскільки, насправді, у природі реалізувалась одна крива, то і маємо з двох кривих сконструювати одну. Якщо швидке винищення частини популяції відбулось лише в один короткий проміжок часу, то спочатку чисельність населення мала б зростати за верхньою кривою, а тоді стрибком перейти на нижню. Найбільш підходящим кандидатом на таку трагічну подію в історії України є 1933 рік. Якщо перехід з верхньої кривої на нижню відбувся у 1933 році, то величина стрибка *N0(1933)-N1(1933)* склала б 11.782 млн. осіб. Такими могли б бути ймовірні втрати українського народу від голодомору. Насправді, відомо, що швидке знищення частини популяції українців відбулось за рахунок голоду у 1921 році. За різними оцінками - 200-300 тис. осіб. За рахунок громадянської війни і Першої світової війни. В останньому випадку жертви навряд чи були більшими за декілька сотень тисяч осіб. Складнішою є оцінка втрат за рахунок громадянської війни. Але за найпесимістичним сценарієм ці втрати не перевищували 1 млн. осіб.

Отже, цифра 10 млн. втрачених життів українців, яка обговорюється в засобах масової інформації у зв'язку з голодомором, цілком узгоджується з наведеними розрахунками. Зауважимо, що і цифра 10 млн. осіб є заниженою оцінкою втрат від голодомору, оскільки після голодомору спостерігалось масове заселення постраждалих від голодомору регіонів вихідцями з центральних областей Росії. Без такого перетоку населення, яке наша модель не враховує, цифри втрат були б ще більш вражаючими.

Приклад 2. Отримані нами формули важливо застосувати до аналізу зміни чисельності населення України за той же період у східній і західній її областях. На жаль, статистичні данні щодо окремої чисельності у цих областях є лише для 1913 року. Для 1939 року такі данні відсутні. Є лише загальна чисельність населення всієї України. У 1913 році населення Західної України складало 8 млн. осіб. Для Західної України візьмемо ту ж питому швидкість зростання чисельності популяції, що і для Східної України. Для обчислення чисельності населення використаємо формулу

$$N_0(t) = n_0 \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} r(\tau)d\tau \right), ,$$

де, на цей раз, $n_0 = 8$ млн. осіб. Відповідно $N_0(1939) = 12.111$ млн. осіб. Отже, за мінімальними оцінками населення західних областей України з 1913 року по 1939 рік збільшилось, як мінімум на 50%, у той час як населення східних областей України за цей же проміжок часу практично не змінилось. Якщо ж брати кількість українців у східних областях України, то ця кількість навіть зменшилась, оскільки вимерлі під час голодомору села заселялись вихідцями з центральних областей Росії. Зауважимо, що західні області України до 1939 року входили до складу Польщі і голодомору 1933 року не зазнало, так само як і голоду 1921 року.

Приклад 3. Розглянемо проміжок часу, для якого у довіднику міститься найдетальніша інформація. Це відтинок з 1970 по 1977 роки. Тут інформація щодо густини швидкості зростання населення і кількість населення подаються щорічно. Цей період в історії України був на рідкість спокійним і цікаво співставити чисельність населення, що відповідає статистичним даним, з чисельністю населення, отриманим за відповідними формулами. На цей раз пакет Mathcad надає нам декілька можливостей для інтерполяції значень питомої швидкості зростання чисельності населення. З них оберемо дві: знову ж таки лінійну інтерполяцію, але за всім масивом даних, і сплайн інтерполяцію. В обох випадках нам потрібно сформувати одностовбцьові матриці значень питомої швидкості *vy* і і відповідних їм значень часу *vx*, а також і статистичних даних по кількості населення *vz*.

$$vx := \begin{pmatrix} 1970 \\ 1971 \\ 1972 \\ 1973 \\ 1974 \\ 1975 \\ 1976 \\ 1977 \end{pmatrix} \quad vy := \begin{pmatrix} 0.0063 \\ 0.0065 \\ 0.0063 \\ 0.0056 \\ 0.0057 \\ 0.0051 \\ 0.0042 \\ 0.0041 \end{pmatrix} \quad vz := \begin{pmatrix} 47.1 \\ 47.5 \\ 47.9 \\ 48.2 \\ 48.5 \\ 48.8 \\ 49.1 \\ 49.3 \end{pmatrix}$$

Далі, для лінійної інтерполяції даних з питомої швидкості зростання використаємо наступну процедуру-функцію

rl(t):= linterp*(vx, vy, t)*

Ця процедура-функція за відомими значеннями функції *r(t)*у дискретному наборі точок відновлює її значення в усіх інших точках проміжку між найменшим і найбільшим значеннями *t*.

Цю ж операцію можна виконати і за допомогою побудови сплайнів, наприклад, третього ступеню. Для цього, спочатку ми знаходимо коефіцієнти сплайнів за допомогою процедури-функції

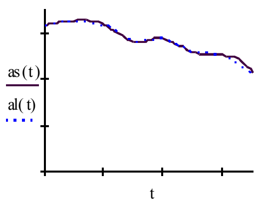
vk:= cspline*(vx, vy)*

Наступним кроком є побудова самого сплайну.

rs(t):= interp*(vk, vx, vy,t)*

Нижче наводиться графік залежності питомої швидкості як функції часу в обох цих випадках. З графіку добре видно, що результати обох підходів візуально не відрізняються, що свідчить про плавність ходу функції *r(t)* і достатньо високу відому її кількість значень. Хоча навіть у цьому разі перевагу слід надати сплайн-інтерполяції, оскільки у вузлах інтерполяції функція *a(t)* не тільки неперервна, але і має неперервну похідну, на відміну від випадку лінійної інтерполяції. Але така перевага має значення лише у разі необхідності диференціювати цю функцію.

t:= 1970,1970.1...1977



Малюнок 3. Графік залежності питомої швидкості зростання населення: as(t) - інтерполяція сплайнами, al(t) - лінійна інтерполяція.

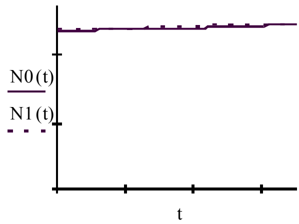
Тепер, як і раніше, використаємо формули

$$N(t) = N_0 \exp\left[\int_{t_0}^{t} r(\tau)d\tau\right] ,$$

$$N(t) = N_1 \exp\left[-\int_{t}^{t_1} r(\tau)d\tau\right] ,$$

Відповідні графіки наведені нижче. Візуально між собою вони практично не відрізняються.

t:= 1970,1970.1...1977



Малюнок 4. Залежність чисельності населення від у часу: функція N0(t) використовує відоме початкове значення чисельності населення, функція N1(t) – кінцеве.

Так само у прийнятому мірилі візуально всі статистичні дані щодо чисельності населення за обговорюваний період лягають на графік функції *N0(t)*. Цей факт не стільки є свідченням вірності формул, вони не потребують додаткового обґрунтування, скільки свідченням узгодженості статистичних даних щодо чисельності населення і питомої швидкості зростання популяції. А також цей факт є свідченням відсутності якихось гуманітарних катастроф у житті українського народу за цей період. І все ж таки певна різниця між статистичними даними і обчисленими даними за допомогою функції *N0(t)* є. За статистичними даними чисельність населення України у 1977 році становить 49.5 млн. осіб, а за відповідною формулою при використанні лінійної інтерполяції чисельність населення становить 48.995 млн. осіб. За тою ж формулою, але при використанні інтерполяції сплайнами - 49.003. Невідповідність у 0.5 млн. осіб надто істотна, щоб не звернути на неї увагу. Якщо вірити наведеним у довіднику статистичним даним, то єдиним джерелом цієї невідповідності є те, що наша формула пов'язувала чисельність населення лише з питомою швидкістю зростання популяції.

Ця швидкість прямо пропорційна різниці між кількістю народжень і кількістю смертей. Але чисельність популяції може змінюватись не лише за рахунок народження і смерті її особин. Вона може змінюватись і за рахунок міграції особин за межі території України, а також і зворотного процесу - міграції населення з інших територій Радянського Союзу у межі України. Отже, неузгодженість у 0.5 млн. осіб означає, що за вісім років на територію України в'їхало на 0.5 млн. більше людей, ніж виїхало за її межі. Такі переміщення у Радянському Союзі справді заохочувались і дійсно мали місце. Наприклад, військовий при виході у відставку мав право обирати місце майбутнього проживання, де йому були гарантовані житло і прописка. Більшість з них, звичайно, обирали територію України, особливо Одесу і Севастополь. Радянська армія у семидесяті роки налічувала близько 4 млн. військовослужбовців. Якщо додати до кількості офіцерів ще кількість членів їх сімей, то картина вимальовується досить вражаюча. А це був лише один фактор перемішування населення в Радянському Союзі.

Екстраполяційна одновидна модель. Логістичне рівняння

Отримані у попередньому розділі залежності чисельності популяції від часу надзвичайно зручні для задач інтерполяції. Тобто, якщо у певному часовому інтервалі відомі значення питомої швидкості зростання популяції і її чисельності, то в усіх інших точках цього інтервалу за цими формулами їх можна знайти. Не менш важливою є задача екстраполяції. У цьому разі нам потрібно знайти значення питомої швидкості зростання популяції та її чисельності за межами інтервалу, якщо вони відомі у деяких точках всередині інтервалу і на його межах. Таку задачу можна спробувати розв'язувати методами чисельного аналізу, будуючи, наприклад, відповідний багаточлен. Такий підхід не ефективний не лише з фізичної точки зору, але і з математичної також. Чим більше спеціальних знань з даної предметної області можна закласти у відповідні екстраполяційні формули, тим надійнішими є ці формули. Скажімо, при прогнозуванні чисельності популяції через великий проміжок часу, слід враховувати, що будь-яка популяція не може невпинно зростати, а зрештою виходить на певний стабільний рівень щодо своєї чисельності. У теорії з'являється новий параметр N_{max}, що називається ємністю середовища. Він дорівнює максимальній чисельності популяції, що сумісна з наявними засобами її існування. Найпростіший спосіб врахувати існування у популяції стаціонарного стану щодо її чисельності - це ввести залежність від чисельності популяції в питому швидкість зростання популяції. У цьому плані найпоширенішою є лінійна залежність питомої швидкості зростання популяції від її чисельності, а саме

$$r(N) = a \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{N_{\max}}\right) ,$$

де a - питома швидкість зростання популяції у початковий момент часу. Її слід вважати сталою величиною та якщо нам відомі її значення, приналежні певному часовому інтервалу, то необхідно взяти значення на одному з кінців інтервалу. Якщо екстраполяція спрямована у майбутнє, то значення необхідно взяти на правому кінці інтервалу, якщо - у минуле, то - на лівому.

Параметр N_{max} в деяких випадках легко оцінити, наприклад, у випадку риби у водоймі. У деяких випадках це зробити надзвичайно важко, наприклад, чисельність населення певної країни. В останньому разі цей параметр можна знайти, знаючи часову залежність питомої швидкості зростання популяції за певний проміжок часу.

Приклад 1. Оцінимо ємність середовища під назвою Україна щодо проживання на ньому максимально можливої за певних умов кількості населення. За відправні візьмемо дані щодо питомої швидкості зростання популяції у 1913 році і 1939 році. В якості r візьмемо r_0 ,тобто питому швидкість зростання населення України у 1913 році. В якості $r(N)$ - питому швидкість зростання у 1939 році. Тоді для ємності середовища отримаємо

$$N_{\max} = \frac{r0 \cdot N(1939)}{r0 - r(N(1939))}$$

Підставивши у цю формулу відповідні числові значення, що вже використовувались нами раніше, отримаємо наступний результат

$$N_{\max} = 129.737 \text{ млн.осіб} .$$

Тобто, у час від початку Першої і до початку Другої світової війн в Україні, навіть за не дуже сприятливих політичних і економічних умов могло проживати близь 130 млн. осіб. Насправді проживало лише приблизно третина від цієї кількості.

Рівняння для чисельності популяції, яке містить наведену вище лінійну залежність питомої швидкості зростання популяції від її чисельності, називається логістичним рівнянням і має вигляд

$$\frac{dN(t)}{dt} = r(N)\,N(t)$$

або

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) - \frac{r}{N_{\max}} N^2(t) \quad .$$

Доповнимо рівняння початковою умовою

$$N(t_0) = N_0 \quad .$$

Логістичне рівняння, на відміну від попереднього подібного рівняння, є нелінійним, а тому його розв'язки мають багатший зміст. Вперше воно було запропоновано Ферхюльстом у 1838 році, а у 1930 році було перевідкрито Перлом. Тому воно має ще одну назву - рівняння Ферхюльста-Перла. Це рівняння дозволяє поділ змінних, у висліді якого маємо

$$\frac{N_{\max} \cdot dN(t)}{N(t)[N_{\max} - N(t)]} = rdt \quad .$$

Розкладемо дробово-раціональну функцію у лівій частині рівняння на прості дроби

$$\frac{1}{N(t)[N_{\max} - N(t)]} = \frac{1}{N_{\max} N(t)} + \frac{1}{N_{\max}[N_{\max} - N(t)]} \, .$$

Тепер диференційне рівняння набуде вигляду

$$\left[\frac{1}{N(t)} + \frac{1}{N_{\max} - N(t)}\right] dN(t) = rdt \, .$$

Зінтегрувавши обидві частині рівняння в межах $[t_0, t]$, замість задачі Коші для диференційного рівняння отримаємо інтегральне рівняння

$$\int_{N_0}^{N} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{N_{\max} - n}\right) dn = r(t - t_0) \quad .$$

Його інтегрування дає

$$\ln N(t) - \ln(N_0) - \ln[N_{\max} - N(t)] + \ln(N_{\max} - N_0) = r(t - t_0)$$

або

$$\ln\left[\frac{N(t)}{N_{\max} - N(t)}\right] = r(t - t_0) + \ln\left[\frac{N_0}{N_{\max} - N_0}\right] \quad .$$

Цей частинний інтеграл можна представити і так

$$\frac{N(t)}{N_{\max} - N(t)} = \frac{N_0}{N_{\max} - N_0} \exp[a(t - t_0)]$$

або

$$N(t) = \frac{N_{\max} N_0 \exp[r(t - t_0)]}{N_{\max} - N_0 \{1 - \exp[r(t - t_0)]\}} \ .$$

Оскільки права частина вихідного рівняння явно не залежить від часу, то це рівняння, за означенням, називається автономним. Стаціонарні розв'язки цього рівняння можна отримати, прирівнюючи нулю його праву частину

$$N(t) - \frac{1}{N_{\max}} N^2(t) = 0 \ .$$

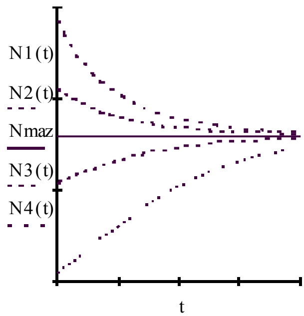
Стаціонарні розв'язки визначають стан рівноваги системи. У даному разі їх два:

$$N(t)=0 \,,$$

$$N(t) = N_{\max} \ .$$

Загальний вигляд інтегральних кривих видно на наступному малюнку.

t=2000,2000.1..2200



Малюнок 5. Залежність чисельності популяції від часу при різних її початкових чисельностях.

Тут початкові чисельності популяцій *n1=50* млн. осіб, *n2=100* млн. осіб, *n1=160* млн. осіб, *n1=210* млн. осіб, $N\max = 130$ млн. осіб,*r=0.016, t0=2000* років.

Оскільки права частина рівняння при $N(t) < N_{\max}$ є додатною, а при $N(t) > N_{\max}$ – від'ємною, то стаціонарний розв'язок рівняння $N(t) = N_{\max}$ є стійким. Тобто, якщо система знаходиться у стійкому стані, то при будь-якому невеликому збуренні її стану вона через деякий час знову повертається у цей стан. Навпаки, стаціонарний розв'язок *N(t)=0* є нестійким, оскільки в околі нуля при $N(t) < 0$ права частина рівняння є від'ємною, а при $N(t) > 0$ – додатною. Це означає, що при невеликому збуренні цього стану системи вона ніколи не повертається у цей нестійкий стан. Тобто, якщо якимось чином виникає довільна початкова кількість особин популяції, то чисельність популяції ніколи не прямуватиме до нуля, а буде еволюціонувати то другого вже стаціонарного стану $N(t)=N_{max}$. Отже, як видно з останнього малюнку, якщо початкова чисельність популяції більша за її стаціонарне значення, то чисельність популяції з часом спадає аж до досягнення її граничної кількості. Якщо ж чисельність популяції менша за її стаціонарне значення, то чисельність популяції з часом зростає аж до досягнення цього стаціонарного стану.

Таким чином, застосовані математичні методи неспростовно доводять та одночасно підтверджують найпесимістичніші дані щодо чисельності загиблих під час геноциду-голодомору українського народу 1932-1933 років.

Shvets. V.

1933 – UKRAINIAN CALCULATION

In this article on the basis of mathematical methods of modeling the dynamics of population size are grounded the quantitive indexes of casuelties in time of genocide-Holodomor of Ukrainian people in 1932-1933.

Key words: Holodomor, population, Ukraine inhabitants, population size, migration.

Швец В.Т.

1933 – УКРАИНСКИЙ СЧЁТ

В статье на основе математических методов моделирования динамики численности населения обосновывается количественными показателями во время геноцида-голодомора украинского народа 1932-1933 годов.

Ключевые слова: голодомор, популяция, население Украины, численность населения, миграция.

Джерела та література

1. *Голодомор в Україні 1932-1933 рр. Бібліографічний покажчик. - Вип. 2. - Упорядники: Бур'ян Л. М., Рікун І. Е. - Одеса: Студія "Негоціант", 2008. - 573 с.*
2. *Статистичний довідник: УРСР у цифрах . - К.: Техніка, 1978. - 168 с.*